



# Zwölfeck & Kreis

In diesem Forscherheft geht es um drei Exponate, nämlich „Zwölf Ecken“, „Wie groß ist die Fläche eines Kreises?“ und „Was ist  $\pi$ ?“. Wir werden nun gemeinsam erforschen, wie diese zusammenhängen. Beginnen wir zunächst mit dem Zwölfeck.

## Was sehen wir hier?



Das Exponat „Zwölf Ecken“ zeigt ein aus grünen Teilen zusammengebautes Zwölfeck. Ein Viertel dieser Fläche lässt sich abnehmen und neu anordnen. Ziel ist es, durch geschicktes Umlegen eine möglichst einfache Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes zu finden.





## Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfecks?

Untersuche das Zwölfeck durch Umlegen der Teile. Wie lautet die Formel für den Flächeninhalt?

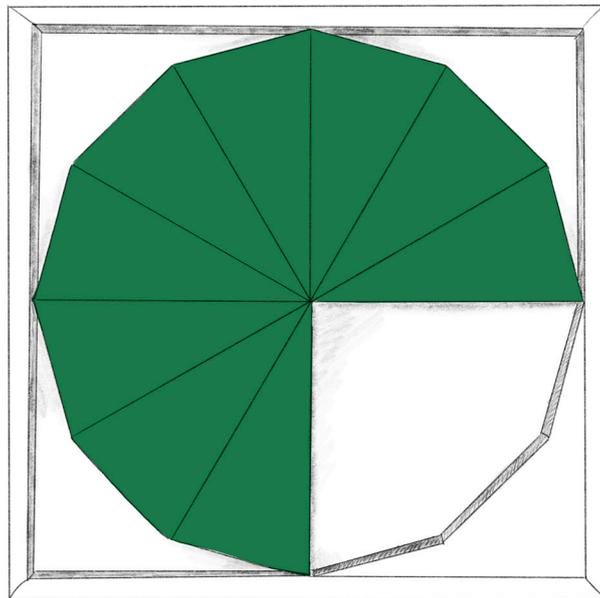
---



Wir wollen nun die Formel begründen. Skizziert nun in das untere Bild, wie ihr die Teile neu angeordnet habt. Markiert zusätzlich den Radius  $r$  in dem Bild.

### Hinweis

Der Radius  $r$  ist an mehreren Stellen zu finden.



Begründet nun, warum diese Formel für regelmäßige Zwölfecke gilt. Geht dabei besonders auf den Faktor 3 ein. Nutzt dazu auch eure Skizze.

---

---

---

---

---

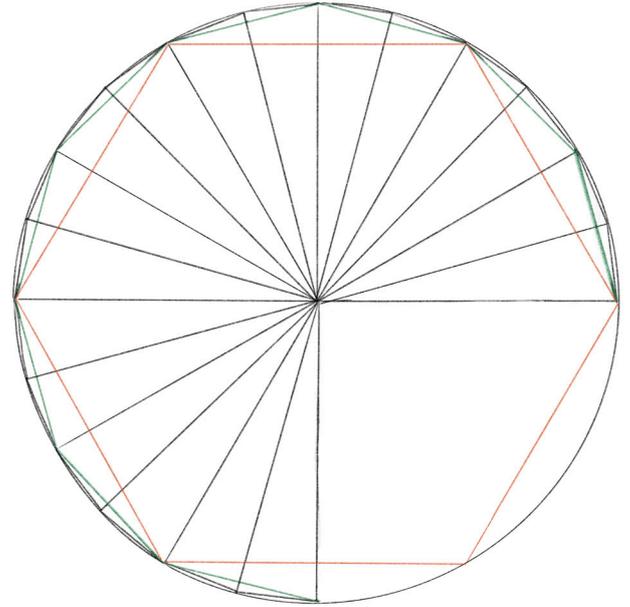
---

---





Jetzt kennen wir die Flächeninhaltsformel eines Zwölfecks. Doch was hat diese mit dem Kreis zu tun? Es ist schwer den Flächeninhalt eines Kreises exakt zu berechnen, daher muss man Wege finden, um einen möglichst guten Näherungswert zu finden. Legt man ein regelmäßiges Zwölfeck in einen Kreis mit selben Radius, so stellt man fest, dass sie fast denselben Flächeninhalt haben.



Im nächsten Schritt begeben wir uns zum Exponat „Was ist  $\pi$ ?“. Es befindet sich im anderen Raum. Hier wollen wir nun erst einmal eine Formel für den Umfang eines Kreises finden.



### Was sehen wir hier?

Auf dieser Seite des Tisches befinden sich drei verschieden große Kreisscheiben und ein Maßband. Mit diesen kann die Zahl  $\pi$  (gesprochen Pi) näherungsweise ermittelt werden und somit auch der Kreisumfang.



### Wie groß ist der Umfang eines Kreises?

Den Umfang eines Kreises kann man hier ganz leicht ermitteln, indem man eine Kreisscheibe nimmt und sie das Maßband entlangrollt. Die zurückgelegte Distanz entspricht dem Umfang. Messt nun für mindestens zwei Kreisscheiben den Umfang  $u$  und Durchmesser  $d$ . Ergänzt dazu die Tabelle. Berechnet auch den Radius  $r$  und das Verhältnis aus Umfang und Durchmesser.

Farbe	d	u	r	u/d





Wir stellen fest, dass der Wert  $u/d$  nahezu konstant ist. Es ist ein sogenannter Proportionalitätsfaktor zwischen dem Umfang und dem Durchmesser. Dieser Faktor wird  $\pi$  genannt.  $\pi$  ist rund 3,14. Nun wissen wir, dass folgende Formel gilt:  $u=\pi \cdot d$ .

Jetzt kennen wir eine Formel zur Berechnung des Kreisumfangs. Diese benötigen wir, um eine exakte Formel für den Flächeninhalt eines Kreises herleiten zu können. Um herauszufinden, wie dieser ermittelt werden kann, gehen wir weiter zur anderen Tischseite zum Exponat „Wie groß ist die Fläche eines Kreises?“.



### Was sehen wir hier?

Bei diesem Exponat findet ihr einen Kreis, der in zwölf gleiche Teile geschnitten ist. Diese Teile sollen in eine vorgefertigte Form gelegt werden. Anhand dieser Form lässt sich eine Formel zur Berechnung des Kreisflächeninhaltes ableiten.



### Wie berechnet man den Flächeninhalt eines Kreises?

Um diese Frage beantworten zu können, puzzeln wir nun die zwölf Kreissektoren in die vorgefertigte Form. Stellt euch nun vor, man hätte nicht nur 12 Teile sondern unendlich viele. Welche Form entsteht?

---

Mit welcher Formel berechnet man den Flächeninhalt dieser Form?

---

---

---

### Tipp

Es handelt sich um ein spezielles Viereck.

Betrachten wir nun die entstandene Form genauer. Wir können dabei feststellen, dass die Grundseite und die Höhe dieser Form bekannte Werte aus dem Kreis sind. Bei der Grundseite handelt es sich allerdings nur um die Hälfte einer bekannten Größe. Notiert, welche Größen zusammengehören.





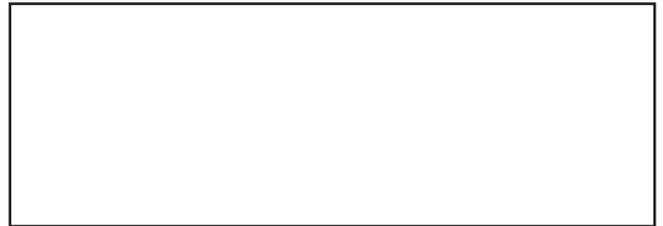
Die Höhe der Form entspricht \_\_\_\_\_ des Kreises  
und die Grundseite entspricht der Hälfte \_\_\_\_\_.



Skizziert nun, wie ihr die Kreisausschnitte in die Form gelegt habt und markiert zusätzlich die Höhe und die Grundseite. Beschriftet diese mit den entsprechenden Größen vom Kreis.

### Hinweis

Ihr könnt zum Beschriften die Abkürzungen  $\frac{1}{2}u$  und  $r$  verwenden.



Ersetzt abschließend die neuen Bezeichnungen in der oben aufgestellten Formel für den Flächeninhalt der Form. Wie lautet die daraus resultierende Formel für den Kreisflächeninhalt?

---



Zum Schluss können wir alle Erkenntnisse zusammenfassen. Wir wissen, wie sich der Kreisflächeninhalt berechnet und wir wissen, wie man den Umfang berechnet. Setzt nun die Formel für den Umfang in die Formel für den Flächeninhalt ein. Welche neue Formel erhaltet ihr für den Flächeninhalt? Vergleicht die neue Formel mit der Flächeninhaltsformel für das Zwölfeck.

---



---



---



---

### Hinweis

Achtet darauf, dass der Durchmesser doppelt so groß ist wie der Radius.

---



---



---





## Zum Weiterdenken:

### Was ist $\pi$ für eine Zahl?

Wie lautet der exakte Zahlenwert von  $\pi$ ?  
Welche Bedeutung hat  $\pi$  in der Mathematik?  
Zu welchen Zahlen gehört  $\pi$ ? Ihr kennt zum Beispiel natürliche und gebrochene Zahlen.  
Kennt ihr noch mehr?

### Flächeninhalt eines 24-Ecks:

Wir haben festgestellt, dass der Flächeninhalt eines Zwölfecks nur etwas kleiner ist, als der eines Kreises mit dem selben Radius.

Wie groß ist der Unterschied zwischen dem Flächeninhalt eines 24-Ecks und einem Kreis?

Wie kann man mit Hilfe des Zwölfecks schnell den Flächeninhalt eines 24-Ecks berechnen?



Dieses Forschungsheft ist im Rahmen der Staatsexamensarbeit von Tom-Florian Borrack in Verbindung mit der Professur für Didaktik der Mathematik an der Technischen Universität Dresden entstanden. Eine zusätzliche Überarbeitung erfolgte durch Prof. Dr. Andrea Hoffkamp, Dr. Rahel Brugger und Lisa Nickolaus.

